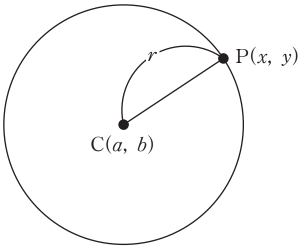
第 6 講　円
PART1　円の方程式

要点 ①　円の方程式

円は，定点からの距離が一定である点全体の集合である。
円の方程式を求める。



中心が C$(a,\ b)$，半径が r の円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

より　　　　　　　　　$=r$

したがって　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

> **円の方程式**
> 点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
>
> $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
>
> とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

例　中心が点 $(1,\ 2)$，半径が 3 の円の方程式は

　　　　$+$　　　　$=$　　　すなわち　$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

方程式 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$ は，$\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$ と変形できることから，

中心　　　　，半径　　　の円を表す。

要点 ②　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を変形すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となる。
一般的に，円の方程式は

$$x^2+y^2+lx+my+n=0\ (l,\ m,\ n\ は定数)$$

の形で表される。

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の形の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形することができる。

例 方程式 $x^2+y^2-6x+10y+30=0$ の表す図形

$$x^2-6x+y^2+10y+30=0$$

$$(x\qquad)^2\qquad+(y\qquad)^2\qquad\quad+30=0$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=4$$

よって，この方程式は点　　　　　を中心とする半径　の　を表す。

方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ は

$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円

$k=0$ ならば　点 $(a,\ b)$

を表し，$k<0$ ならば，この方程式が表す図形はない。

1 (1) 次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i) 中心が点 $(1,\ -1)$ で，半径が 2

(ii) 中心が原点で，点 $(3,\ -4)$ を通る

(iii) 3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通る

(2) 方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

円の方程式の決定

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (標準形)

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

中心の座標や半径の情報がない場合は $x^2+y^2+lx+my+n=0$ (一般形) を用いる。

方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

x，y それぞれについて平方完成し，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形する。

$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

第 6 講　PART1 確認問題

1　中心が点 (2, 4) で，半径が 3 の円の方程式は，

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

2　中心が原点で，点 (3, −1) を通る円の方程式は，

$$x^2+y^2=\boxed{\text{エオ}}$$

である。

3　3 点 (0, 1)，(1, 4)，(3, 0) を通る円の方程式は，

$$x^2+y^2-\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}}y+\boxed{\text{ク}}=0$$

である。

4　方程式 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ の表す図形は，

点 $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{\text{サ}}$ の円

である。

第 6 講　円

PART1　円の方程式

1　(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(1,\ -1)$ で，半径が 2

(ii)　中心が原点で，点 $(3,\ -4)$ を通る

(iii)　3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通る

(2)　方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

[解答]

(1) (i)　$(x-1)^2+\{y-(-1)\}^2=2^2$　　すなわち　　$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

(ii)　半径 r は中心 $(0,\ 0)$ と点 $(3,\ -4)$ の距離であるから

$$r^2=3^2+(-4)^2=25$$

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2=25$

(iii)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

この円が 3 点 $(0,\ 2)$，$(6,\ 0)$，$(7,\ 3)$ を通るので

$$\begin{cases} 0^2+2^2+2m+n=0 \\ 6^2+0^2+6l+n=0 \\ 7^2+3^2+7l+3m+n=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2m+n=-4 & \cdots\cdots ① \\ 6l+n=-36 & \cdots\cdots ② \\ 7l+3m+n=-58 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－②より $-6l+2m=32$　　すなわち　　$3l-m=-16$　$\cdots\cdots$ ④

②－③より $-l-3m=22$　　すなわち　　$l+3m=-22$　$\cdots\cdots$ ⑤

④，⑤より $l=-7$，$m=-5$　　このとき，①より $n=6$

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2-7x-5y+6=0$

(2)　$x^2+y^2+4x-8y+17=0$ を変形すると

$$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+17=0$$

$$(x+2)^2+(y-4)^2=3$$

よって，この方程式は点 $(-2,\ 4)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円を表す。

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：4，ウ：9

[解説]

中心が点 (2，4) で，半径が 3 の円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-4)^2=3^2$$ [A]

すなわち

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=9}$$

[A]　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$（標準形）

2 **[正解]** エオ：10

[解説]

半径 r は中心 (0，0) と点 (3，−1) の距離であるから

$$r^2=3^2+(-1)^2=10$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2=10}$$ [B]

[B]　原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

3 [正解] カ：4，キ：4，ク：3

[解説]

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

[C]

この円が 3 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 4)$，$(3,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases} 0^2+1^2+m+n=0 \\ 1^2+4^2+l+4m+n=0 \\ 3^2+0^2+3l+n=0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} m+n=-1 & \cdots\cdots① \\ l+4m+n=-17 & \cdots\cdots② \\ 3l+n=-9 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②−①より　$l+3m=-16$　……④

③−②より　$2l-4m=8$

すなわち　$l-2m=4$　……⑤

④，⑤より　$l=-4$，$m=-4$

このとき，①より　$n=3$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y+3=0}$$

[C]　中心の座標や半径の情報がない場合は
$x^2+y^2+lx+my+n=0$（一般形）
を用いる。

4 [正解] ケ：3，コ：2，サ：2

[解説]

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$ を変形すると [D]

$$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+9=0$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$ [D]

よって，この方程式は点 **(3，2)** を中心とする半径 **2** の円を表す。

[D]　x，y それぞれについて平方完成し
$(x-a)^2+(y-b)^2=k$
の形に変形する。
$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。